# VLASTNÉ FREKVENCIE PRAVOUHLÉHO UZAVRETÉHO PRIESTORU

Milan Drahoš, Richard Drahoš

## 1 Úvod

Pri riešení akustickej kvality uzavretého priestoru sa vychádza zo základných princípov vlnovej akustiky, geometrickej akustiky a štatistickej akustiky. Každá z týchto oblastí akustiky umožňuje riešenie čiastkových parametrov takéhoto priestoru, pričom požadovaná akustická kvalita priestoru sa dá zabezpečiť len ich vzájomným prepojením. Predmetom vlnovej akustiky v uzavretom priestore je stanovenie akustických veličín (akustického tlaku, akustickej rýchlosti) ako funkcie polohy a času.

Zdroj zvuku v pravouhlom uzavretom priestore vytvára komplikované zvukové pole, ktoré je spôsobené mnohonásobnými odrazmi zvuku od stien, stropu a podlahy. V dôsledku odrazov medzi tromi dvojicami vzájomne rovnobežných plôch, ale aj v dôsledku viacnásobných odrazov od všetkých plôch dochádza k vzniku stojatého vlnenia ak dôjde k zhode budiacej frekvencie zdroja s frekvenciou vlastných kmitov (módov, tvarov, vidov) priestoru.

Frekvencie vlastných kmitov pravouhlého uzavretého priestoru sa stanovia analytickým riešením vlnovej rovnice pri zavedení okrajových podmienok.

## 2 Vlnová rovnica v pravouhlých súradniciach

Priebeh akustických javov v priestore a v čase opisuje vlnová rovnica, ktorej riešenie závisí od priestorových premenných, tzn. od usporiadania súradnicovej sústavy. Pri riešení vlnovej rovnice v pravouhlých (kartézskych) súradniciach sa musí prihliadať k vlastnostiam akustického signálu a k okrajovým podmienkam, pričom analytické riešenie je možné len pre jednoduché prípady (harmonický signál) [1].

Vlnová rovnica v pravouhlej súradnicovej sústave ($x$, $y$ a $z$) pre akustický tlak má tvar

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{1}$$

kde $p$ je okamžitý akustický tlak závislý od času a priestorových súradníc

$$p = p\left(t,\vec{\xi}\right) \quad \vec{\xi} = x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$$

$c_0$ je rýchlosť šírenia zvuku vo vzduchu.

Akustický tlak harmonického signálu v komplexnom tvare je vyjadrený vzťahom

$$\dot{p}(t,\xi) = p_M(\xi)\cdot e^{j(\omega+\varphi)} \tag{2}$$

kde $p_M(\xi)$ je amplitúda signálu v bode $\xi$ (nezávislá od času),

$\omega$ je uhlová frekvencia,

$\varphi$ je počiatočná fáza.

Derivovaním vzťahu (2) podľa času

$$\frac{\partial \dot{p}(t,\xi)}{\partial t} = p_M(\xi)\cdot e^{j(\omega t+\varphi)}\cdot j\omega$$

$$\frac{\partial^2 \dot{p}(t,\xi)}{\partial t^2} = p_M(\xi) \cdot e^{j(\omega t+\varphi)} \cdot j\omega \cdot j\omega = -\omega^2 p_M(\xi) \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}$$

a porovnaním so vzťahom (2) má potom vzťah (2) tvar

$$\frac{\partial^2 \dot{p}(t,\xi)}{\partial t^2} = -\omega^2 p_M(\xi) \cdot e^{j(\omega t+\varphi)} = -\omega^2 \dot{p}(t,\xi)$$

alebo skrátene

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\omega^2 p \quad . \tag{3}$$

Dosadením (3) do vzťahu (1) má vlnová rovnica pre akustický tlak tvar

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} p = 0 \quad . \tag{4}$$

Pri aplikácii Laplaceovho operátora, ktorý symbolizuje 2. deriváciu podľa priestorových súradníc ma vlnová rovnica tvar

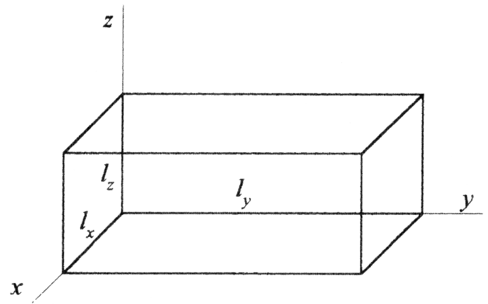
$$\Delta p + k^2 p = 0 \tag{5}$$

kde $k = \dfrac{\omega}{c_0}$ je vlnové číslo.

Analytické riešenie vlnovej rovnice (5) pre pravouhlý uzavretý priestor sa tesne viaže na okrajové podmienky a v priestorovej akustike umožňuje zistiť frekvencie vlastných kmitov takéhoto priestoru.

## 3 Vlastné kmity v pravouhlých netlmených priestoroch

Pri zistení vlastných kmitov pravouhlého priestoru tvaru kvádra o dĺžke hrán $l_x$, $l_y$, $l_z$ sa predpokladajú dokonale tuhé steny (α = 0). Pri riešení vlnovej rovnice (5) sa začiatok pravouhlého súradnicového systému umiestni do rohu kvádra podľa Obrázku 1.




**Obrázok 1.** Priestor dutého kvádra s rozmermi $l_x$, $l_y$ a $l_z$ [2]

Na stenách ohraničujúcich priestor sú zložky akustickej rýchlosti **v** nulové a okrajové podmienky sú vyjadrené takto:

$$\text{pre } x = 0, x = l_x \text{ je } \boldsymbol{v}_x = 0$$
$$\text{pre } y = 0, y = l_y \text{ je } \boldsymbol{v}_y = 0$$
$$\text{pre } z = 0, z = l_z \text{ je } \boldsymbol{v}_z = 0$$

Pri zavedení týchto okrajových podmienok potom z riešenia vlnovej rovnice (5) vyplýva, že vlnovým číslom *k* je výraz

$$k = \sqrt{\left(\frac{n_x \pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{l_z}\right)^2} \tag{6}$$

a vlastné frekvencie pravouhlého uzavretého priestoru sú dané vzťahom

$$f_{n_x, n_y, n_z} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2} \qquad [\mathrm{Hz; m.s^{-1}; -; m}] \tag{7}$$

kde $n_x, n_y, n_z$ je trojica celých čísiel, ktorá predstavuje index kmitu (tvaru, módu), pričom $n$ = 0, 1, 2 ,... , v rôznych kombináciách s výnimkou kombinácie $n_x, n_y, n_z = 0, 0, 0$.

Vlastné frekvencie pravouhlého uzavretého priestoru sa delia na frekvencie:

a) osového (axiálneho) kmitu, ak dve z čísiel $n_x, n_y, n_z$ sú rovné nule, napr. $f_{n_x,0,0}$ a pre $n_x = 1, n_y = n_z = 0, f_{1,0,0}$, tzn. vlny tohto kmitu sa šíria rovnobežne s osou *x* priestoru a odrážajú sa iba od dvoch protiľahlých plôch,
b) tangenciálneho kmitu, ak jedno z čísiel $n_x, n_y, n_z$ je rovné nule, napr. $f_{n_x,n_y,0}$ a pre $n_x = n_y = 1, n_z = 0, f_{1,1,0}$, tzn. príslušná vlna sa odráža iba od štyroch plôch rovnobežných s osou *x* a *y*,
c) šikmého kmitu, ak všetky čísla $n_x, n_y, n_z$ sú rôzne od nuly, napr. $f_{n_x,n_x,n_z}$ a pre $n_x = n_y = n_z = 1, f_{1,1,1}$, tzn. príslušná vlna sa odráža šikmo od troch dvojíc plôch.

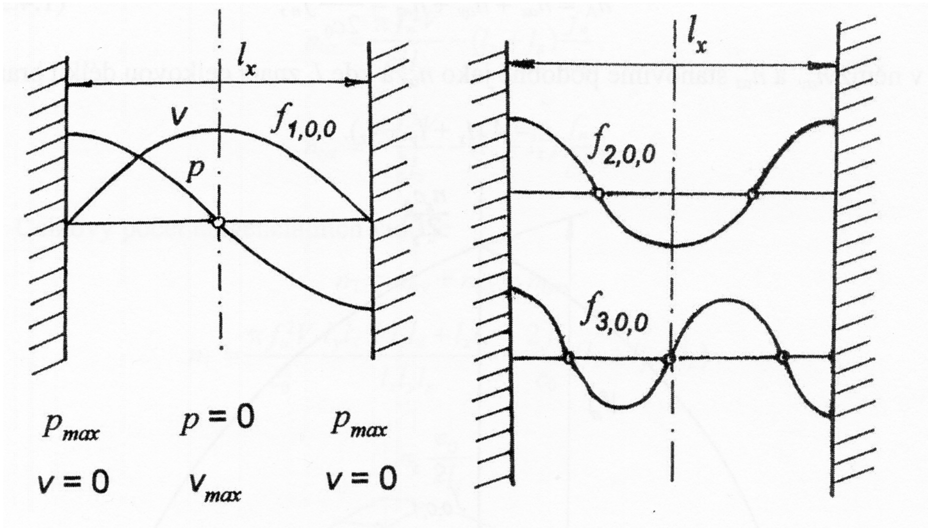
Najnižšie možné frekvencie vlastných kmitov zodpovedajú kombinácii celých čísiel $n_x, n_y, n_z$, tzn. 1,0,0; 0,1,0; 0,0,1, čo zodpovedá vzťahom

$$f_{1,0,0} = \frac{c_0}{2l_x} \qquad f_{0,1,0} = \frac{c_0}{2l_y} \qquad f_{0,0,1} = \frac{c_0}{2l_z} \tag{8}$$

Zo vzťahov (8) vyplýva, že najnižšia frekvencia vlastných kmitov uzavretého priestoru súvisí s najväčším rozmerom priestoru a frekvencie ďalších vlastných kmitov vznikajú pri jej násobkoch.

Pri najnižších vlastných frekvenciách pravouhlého priestoru sa vytvoria polvlny akustických veličín v smere hlavných osí priestoru a tým vzniknú podmienky pre stojaté vlnenie, tzn. stojaté vlnenie vzniká na frekvenciách, pre ktoré platí, že vzájomná vzdialenosť protiľahlých stien je rovná celočíselnému násobku polovice vlnovej dĺžky. Pri frekvencii nižšej ako sú najnižšie frekvencie vlastných kmitov nenastane v pravouhlom priestore vlnový charakter šírenia zvuku.

Na Obrázku 2.1 je znázornený prvý (základný) axiálny kmit napr. v smere osi *x*, ktorý má vlastnú frekvenciu $f_{1,0,0} = c_0/2l_x$ a tomuto kmitu zodpovedá rozloženie akustického tlaku a akustickej rýchlosti pozdĺž osi *x*. Z obrázku je zrejmé, že na protiľahlých stenách vzdialených $l_x$ sú akustické rýchlosti nulové a uprostred medzi stenami sa nachádza uzol akustického tlaku. Na Obrázku 2.2 je znázornené rozdelenie akustického tlaku pri druhom axiálnom kmite s frekvenciou $f_{2,0,0} = 2c_0/2l_x$ a dvomi uzlami a tretieho axiálneho kmitu s frekvenciou $f_{3,0,0} = 3c_0/2l_x$ a tromi uzlami.




**Obrázok 2.1 a 2.2** [2]

Ak sa zvyšujú hodnoty čísiel $n_x, n_y, n_z$ pri rôznych kombináciách, rastie počet frekvencií vlastných kmitov a frekvenčný interval medzi jednotlivými frekvenciami sa rýchle zmenšuje a tým sa zvyšuje hustota frekvencií v oblasti vyšších frekvencií.

### 3.1 Počet vlastných frekvencií

Teória vlnovej akustiky umožňuje stanoviť počet všetkých vlastných frekvencií nižších ako je zvolená frekvencia $f_\mathrm{n}$. Podľa vzťahu (7) sa vlastná frekvencia $f_\mathrm{n}$ môže formálne považovať aj za vektor $\boldsymbol{f}_\mathrm{n}$ a čísla $n_x, n_y, n_z$ za jednotkové vektory $\boldsymbol{n}_x$, $\boldsymbol{n}_y$, $\boldsymbol{n}_z$ v smere jednotlivých osí

$$\mathbf{f}_n = \boldsymbol{n}_x \frac{c_0}{2\,l_x} + \boldsymbol{n}_y \frac{c_0}{2\,l_y} + \boldsymbol{n}_z \frac{c_0}{2\,l_z}\,. \tag{9}$$

Na Obrázku 3 je znázornený frekvenčný priestor vymedzený oktanom o polomere $f_n = |\mathrm{f}_{\boldsymbol{n}}|$, pričom pravouhlé súradnice sú dané celistvým násobkom hodnôt $n_x c_0 / 2l_x$ v smere osi $x$, $n_y\, c_0 / 2l_y$ v smere osi $y$ a $n_z c_0 / 2l_z$ v smere osi $z$.

Každá vlastná frekvencia kmitov $f_\mathrm{i} < f_\mathrm{n}$ môže byť v tomto priestore znázornená formálne ako vektor $\boldsymbol{f}_\mathrm{i}$. Z Obrázku 3 je zrejmé, že elementárny kváder má objem (vyjadrený v jednotkách $Hz^3$)

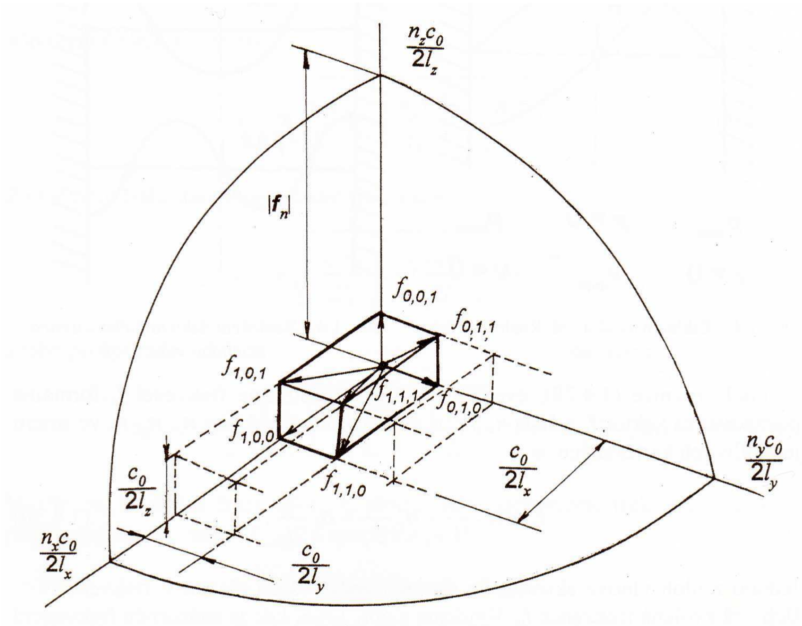
$$f_{1,0,0} f_{0,1,0} f_{0,0,1} = \frac{c_0^3}{8 l_x l_y l_z} = \frac{c_0^3}{8V} \tag{10}$$

kde $V = l_x l_y l_z$ je objem pravouhlej dutiny.

Počet axiálnych kmitov podľa osi $x$, ktorých frekvencia je nižšia ako $f_\mathrm{n}$, je

$$n_{ax} = \frac{2l_x}{c_0} f_\mathrm{n}$$

pričom počet axiálnych kmitov $n_{ay}$ a $n_{az}$ sa stanoví podobne ako $n_{ax}$.




**Obrázok 3.** Oktan frekvenčného priestoru [2]

Celkový počet axiálnych kmitov udáva vzťah

$$n_{\mathrm{A}} = n_{ax} + n_{ay} + n_{az} = \frac{L}{2c_0} f_{\mathrm{n}} \tag{11}$$

kde $L = 4(l_x + l_y + l_z)$, je súčet všetkých dĺžok hrán pravouhlého priestoru.

Počet tangenciálnych kmitov paralelných s rovinou ($n_{\mathrm{x}} c_0/2l_x$ , $n_y\, c_0/2l_y$ ) ~ ($x$, $y$) sa určí ako pomer objemu valcového výseku o ploche základne $\pi f_{\mathrm{n}}^3/4$ a výške $c_0/2l_z$ k objemu elementárneho kvádra $c_0^3/8V$ zmenšený o polovicu prítomných axiálnych kmitov podľa ($n_x$, $n_y$) ~ ($x$, $y$).

$$n_{txy} = \frac{\frac{\pi f_n^3}{4} \frac{c_0}{2l_z}}{\frac{c_0^3}{8V}} - \frac{1}{2}(n_{ax} - n_{ay}) = \frac{\pi f_{\mathrm{n}}^2 V}{c_0^2 l_z} - (l_x + l_y)\frac{f_{\mathrm{n}}}{c_0}$$

a pre ($x$, $z$) a ($y$, $z$)

$$n_{txz} = \frac{\pi f_{\mathrm{n}}^2 V}{c_0^2 l_y} - (l_x + l_z)\frac{f_{\mathrm{n}}}{c_0}$$

$$n_{tyz} = \frac{\pi f_{\mathrm{n}}^2 V}{c_0^2 l_x} - (l_y + l_z)\frac{f_{\mathrm{n}}}{c_0}$$

Celkový počet tangenciálnych kmitov

$$n_{\mathrm{T}} = n_{txy} + n_{txz} + n_{tyz}$$

$$n_{\mathrm{T}} = \frac{\pi f_{\mathrm{n}}^2 V}{c_0^2} \frac{l_y l_x + l_z l_x + l_z l_y}{l_x l_y l_z} - \frac{2 f_{\mathrm{n}}}{c_0}(l_x + l_y + l_z) \tag{12}$$

Počet šikmých kmitov, ktorých frekvencia je nižšia ako $f_n$ je približne rovný pomeru objemu jednej osminy gule $1/8 \times 4/3\,\pi f_n^3$ k objemu elementárneho kvádra $c_0^3/8V$ zmenšený o polovicu kmitov tangenciálnych a štvrtinu kmitov axiálnych

$$n_K = \frac{\frac{1}{8}\frac{3}{4}\pi f_n^3}{\frac{c_0^3}{8V}} - \frac{1}{2}n_T - \frac{1}{4}n_A . \tag{13}$$

Celkový počet všetkých vlastných kmitov udáva vzťah

$$N = n_A + n_T + n_K = \frac{4}{3}\pi V \frac{f_n^3}{c_0^3} + \frac{\pi S}{4}\frac{f_n^3}{c_0^2} + \frac{L}{8}\frac{f_n}{c_0} \tag{14}$$

kde $V$ je objem priestoru,

$S$ je celková plocha priestoru $S = 2\left(l_x l_y + l_y l_z + l_z l_x\right)$,

$L$ je súčet všetkých dĺžok hrán pravouhlého priestoru.

Hustota vlastných kmitov (počet kmitov na 1 Hz) je daný deriváciou vzťahu (14) podľa frekvencie

$$\frac{dN}{df} = \frac{4\pi V}{c_0^3} f_n^2 + \frac{\pi S}{2c_0^2} f_n + \frac{L}{8c_0^2} \tag{15}$$

a pre vyššie vlastné frekvencie sa do úvahy berie len prvý člen tohto vzťahu.

Počet vlastných kmitov v pásme o šírke $\Delta f$ je potom vyjadrený vzťahom

$$\Delta N = \frac{4\pi V}{c_0^3} f_n^2 \Delta f . \tag{16}$$

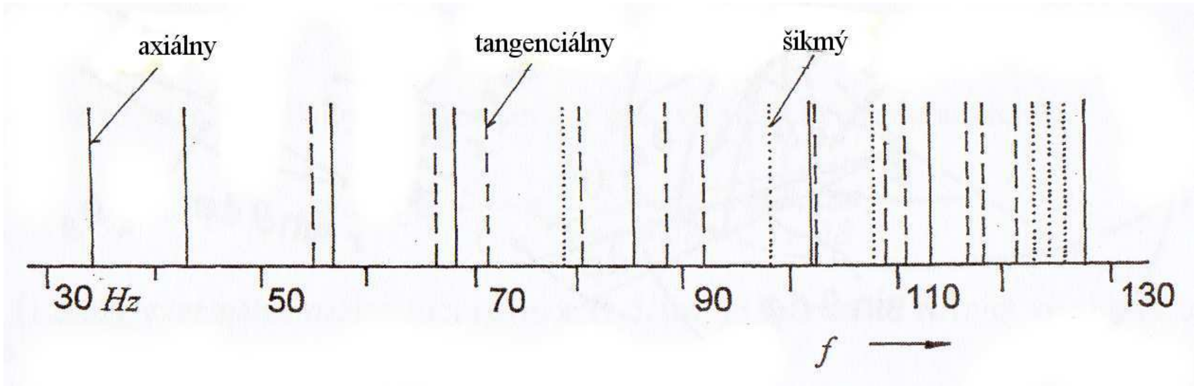
Zo vzťahu (16) vyplýva, že počet vlastných kmitov v konštantnom frekvenčnom intervale rastie kvadraticky s frekvenciou a je úmerný objemu priestoru.

## 3.2 Príklad

Pre pravouhlý priestor s rozmermi $l_x$ = 5 m, $l_y$ = 4 m $l_z$ = 3 m sú v Tabuľke 1 zoradené frekvencie vlastných axiálnych, tangenciálnych a šikmých kmitov pre $c_0$ = 334 m.s$^{-1}$ a na Obrázku 4 sú vyznačené ich polohy (spektrum) na frekvenčnej stupnici.

**Tabuľka 1.** Frekvencie vlastných kmitov v pravouhlom priestore [2]

| $n_x$ | $n_y$ | $n_z$ | *f* v Hz | $n_x$ | $n_y$ | $n_z$ | *f* v Hz |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | **34,0** (a) | 3 | 0 | 0 | **102,0** (a) |
| 0 | 1 | 0 | 42,5 (a) | 1 | 2 | 1 | 102,2 (k) |
| 1 | 1 | 0 | 54,5 (t) | 1 | 2 | 1 | 107,7 (k) |
| 0 | 0 | 1 | 56,7 (a) | 2 | 2 | 0 | 108,9 (t) |
| 1 | 0 | 1 | 66,1 (t) | 3 | 1 | 0 | 110,5 (t) |
| 2 | 0 | 0 | **68,0** (a) | 0 | 0 | 2 | 113,3 (a) |
| 0 | 1 | 1 | 70,8 (t) | 3 | 0 | 1 | 116,7 (t) |
| 1 | 1 | 1 | 78,6 (k) | 1 | 0 | 2 | 118,3 (t) |
| 2 | 1 | 0 | 80,2 (t) | 0 | 1 | 2 | 121,0 (t) |
| 0 | 2 | 0 | 85,0 (a) | 2 | 2 | 1 | 122,7 (k) |
| 2 | 0 | 1 | 88,5 (t) | 3 | 1 | 1 | 124,2 (k) |
| 1 | 2 | 0 | 91,6 (t) | 1 | 1 | 2 | 125,7 (k) |
| 2 | 1 | 1 | 98,2 (k) | 0 | 3 | 0 | 127,5 (a) |



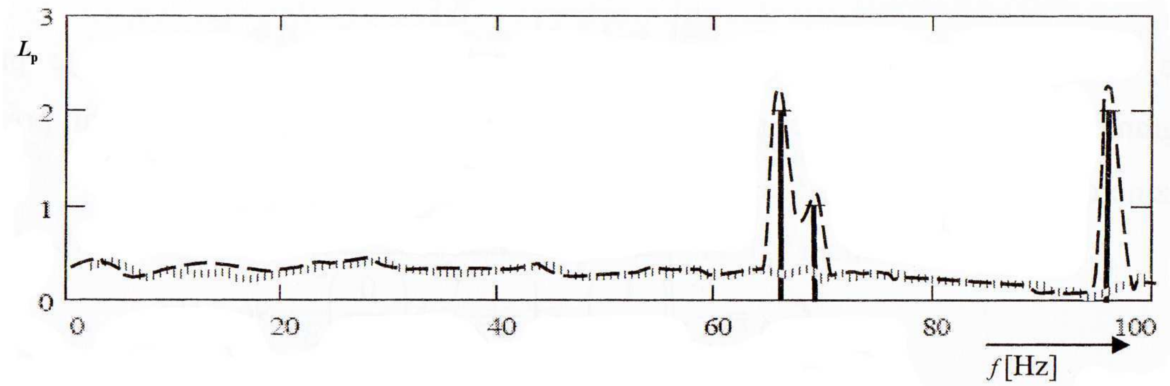

**Obrázok 4.** Spektrum vlastných kmitov pravouhlého priestoru [2]

Z Tabuľky 1 je zrejmé, že najnižšia frekvencia vlastných kmitov súvisí s najväčším rozmerom pravouhlého priestoru a frekvencie ďalších vlastných kmitov vznikajú pri jej násobkoch. Pre uvedený príklad pravouhlého priestoru, počet všetkých vlastných kmitov intervale 30 Hz až 128 Hz je 26 a pod 30 Hz je nulový.

# 4 Vlastné kmity v pravouhlých tlmených priestoroch

V reálnom pravouhlom priestore ($\alpha > 0$; $\alpha \ll 1$) sú vlastné kmity tlmené vplyvom pohlcovania zvuku plochami a preto frekvenčná závislosť akustického tlaku v okolí vlastného kmitu má charakter rezonančnej krivky a bude veľmi zvlnená s výraznými maximami na vlastných frekvenciách.

Ilustrácia frekvenčnej charakteristiky reálneho priestoru s rozmermi $l_x = 2{,}5$ m, $l_y$,= 2,4 m, $l_z = 2{,}5$ m pre vlastné kmity do frekvencie 100 Hz je na Obrázku 5.




**Obrázok 5.** Frekvenčná charakteristika (ozva) priestoru [1]

Pre dosiahnutie akustickej kvality musí byť frekvenčná charakteristika priestoru čo najrovnomernejšia, tzn. hustota vlastných kmitov v prenášanom frekvenčnom pásme musí byť čo najväčšia. Výsledkom je, že jednotlivé rezonančné krivky vlastných kmitov do seba prechádzajú (prekrývajú) a nedajú sa vzájomne rozlíšiť.

Keďže počet vlastných kmitov rastie s frekvenciou tzn., že od určitej frekvencie sa vybudené zvukové pole v uzavretom priestore stáva difúznym. Spodná (minimálna) frekvencia od ktorej je pole difúzne je tzv. kritická frekvencia. Pri tretinovo-oktávovej analýze zvuku v priestore o objeme $V$, difúzne pole sa považuje od kritickej frekvencie

$$f_{t,k} = \frac{600}{\sqrt[3]{V}} \quad [\mathrm{Hz;\ m^3}] \tag{17}$$

## 5. Záver

Vlastné kmity majú veľký vplyv na akustické vlastnosti pravouhlého priestoru, pretože pri vzniku stojatého vlnenia dochádza k rezonancii a tým k nárastu amplitúdy akustického tlaku a narušeniu difúznosti zvukového poľa. Cieľom vlnovej akustiky je zabezpečiť difúznosť zvukového poľa od čo najnižších frekvencií. Z hľadiska vlastných kmitov a ich rozloženia, optimálne rozmery pravouhlého priestoru sú, ak platí

$$1{,}84 \le \frac{\text{dlžka}}{\text{výška}} \le 3{,}46 \qquad 1{,}42 \le \frac{\text{šírka}}{\text{výška}} \le 2{,}31\,.$$

Na zabezpečenie difúznosti pravouhlého uzavretého priestoru sa aplikujú opatrenia súvisiace [3]:

a) s voľbou veľkosti (objemu) priestoru,
b) s rozmermi priestoru, ktoré nemajú byť navzájom celistvými násobkami, ale napr. v pomere 2,5 : 1,5 : 1 ($d : š : v$),
c) so zvýšením zvukovej pohltivosti stien (stropu),
d) s členením priestoru pomocou stĺpov, polostĺpov, prekladov a iných tvarov, ktoré zabezpečia odraz zvuku (rozptyl).

Okrem prenosu zvuku majú vlastné kmity význam aj pre prechodné javy, ako je doznievanie zvuku po vypnutí zdroja zvuku. Vybudený počet vlastných kmitov s odlišnými konštantami útlmu môže mať v prípade vypnutia zdroja zvuku za následok rôzny charakter dozvukového poklesu. Táto problematika v priestorovej akustike je predmetom štatistickej akustiky. V súčasnosti sú klasické výpočtové metódy štatistickej akustiky nahradené predikčnými simulačnými metódami [4].

## Literatúra

[1] Jarina R.: Riešené príklady z elektroakustiky, Žilinská univerzita, 2008
[2] Švor Z.: Elektroakustika a akustika, ČVUT Praha, 2012
[3] Kaňka J.: Akustika stavebních objektů, ERA group, 2009
[4] Rychtáriková M.: Akustika v architektúre, STU 2009, Bratislava

## Summary

The subject of wave acoustic in a closed space is determination of acoustic quantities (acoustic pressure, acoustic velocity) as a function of position and time. Analytical wave equation solution of rectangular enclosed space for boundary conditions determines the frequency oscillations of such a space. If coincidence between excitation frequencies of source with incident frequency oscillations occurs, than standing wave arise. To achieve the acoustic quality of space, the density of incident oscillations must be the largest in the transmitted frequency band. Fulfillment of these conditions will ensure the sound field diffusivity.

## Adresy

Milan Drahoš[1], Richard Drahoš[1,2]
[1] D2R engineering, s.r.o. Hraničná 668/4, 058 01 Poprad
[2] Technická univerzita v Košiciach, Strojnícka fakulta, Katedra environmentalistiky, Park Komenského 5, 042 00 Košice
e-mail: d2r@d2r.sk
http://www.d2r.sk